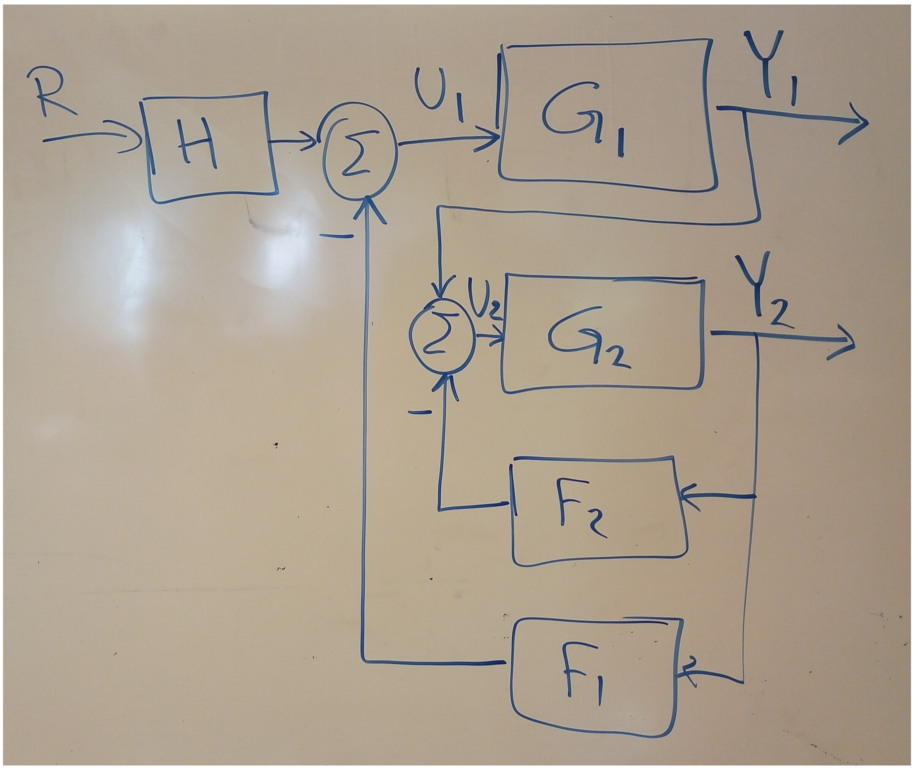
Lösningsförslag TSRT19

Tentamensdatum: 20230602

1. (a) Vi noterar först att responsen ser väldigt mycket ut som ett första ordningens system. Baserat på det kan vi stryka **A** som visar Bodediagram för ett resonant system. Insignalens amplitud är 4 och utsignalen konvergerar mot 40, och således är statiska förstärkningen $10 = 20$dB. Baserat på detta kan **B** strykas eftersom det systemet har en statisk förstärkning på 1 (0dB). Även **D** kan strykas då det systemet har en statisk förstärkning på -10 eftersom fasen går mot 180° och således gör ett teckenbyte $G(0) = 10e^{180^\circ}$ = -10. Kvar är **C**. Vi noterar att stegsvaret har tidskonstant 1s, vilket betyder att systemet har en dominerande pol i $-1/T = -1/1 = -1$. Ritar vi ett Bodediagram över ett sådant system så bör bandbredden vara omkring 1 rad/s (dvs förstärkningskurvan ska börja bryta nedåt omkring frekvensen 1 rad/s). Så är inte fallet utan **C** uppvisar en mycket lägre bandbredd.

   (b) Vi kan lösa uppgiften antingen genom att räkna med totala överföringsfunktionen $\frac{s+2+2(s+1)}{(s+1)(s+2)}$ eller genom linjäritet och ta varje del var för sig, vilket vi gör här. Första delsystemet ger $G(iw) = \frac{1}{iw+1}$ som förstärker med $\frac{1}{\sqrt{1^2+1^1}}$ och fasförskjuter med $-\arctan 1/1$ och delsystem 2 ger $G(iw) = \frac{2}{iw+2}$ som förstärker med $\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}}$ och fasförskjuter med $-\arctan 2/1$. Utsignalen blir således asymptotiskt $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t-\pi/4) + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin(t - \arctan(2))$

   (c) T.ex (grafisk placering av block kan göras på många olika sätt)



2. (a) Vi skulle kunna fokusera på egenvärdena till A-matrisen, men vi går hela vägen och tar fram överföringsfunktionen (för snabb lösning av c senare). Överföringsfunktionen ges av

$$C(sI-A)^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & -\alpha \\ -\alpha & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2-\alpha^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & \alpha \\ \alpha & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$= \frac{-s-1+\alpha}{(s+1)^2-\alpha^2} \quad (3)$$

Polerna ges av lösningar till $(s+1)^2 - \alpha^2 = 0$ (dvs ekvationen som definierar egenvärdena till A) och vi får $-1 \pm |\alpha|$ dvs $-1-\alpha$ och $-1+\alpha$. För asymptotisk stabilitet i meningen att alla egenvärden är i vänstra halvplanet krävs således $|\alpha| \leq 1$.

Olyckligtvis råkade vi konstruera uppgiften så att modellen är icke styrbar vilket leder till att en pol förkortas bort och det bara blir kvar $\frac{-1}{s+1+\alpha}$ i överföringsfunktionen och ett annat svar. Man kan alltså ha fallet $\alpha > 1$ då systemet är instabilt men vi ser det inte på utsignalen. Vi ger rätt för båda då det var en icke tänkt komplikation som är svår att se (examinator missade det ju uppenbarligen...).

(b) Frågan hintar att det inte alltid är möjligt att göra den önskade designen. Vi kan studera om systemet är styrbart (eller så noterar man under beräkningarna av polplaceringen att det inte alltid går). Styrbarhetsmatrisen ges av $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ och den är singulär om $\alpha = 0$. Att fallet α är problematiskt ser man även genom att bara titta på modellen som då säger att $\dot{x}_2 = -x_2$, dvs det andra tillståndet blir helt frånkopplat både styrsignal och andra tillstånd och kan på intet sätt påverkas (det är dock fortfarande stabilt, men systemet kommer nu ha ett egenvärde låst i -1) (detta är naturligtvis kopplat till förkortningen i överföringsfunktionen i a)

Återigen för att snabbt kunna reda ut uppgift (c) senare så tar vi fram slutna systemet direkt,

$$
\begin{aligned}
G_c(s) = C(sI-(A-BL))^{-1}Bl_0 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \left(sI - \begin{pmatrix} -1-l_1 & \alpha - l_2 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \end{pmatrix} && (4) \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1+l_1 & -\alpha + l_2 \\ -\alpha & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \end{pmatrix} && (5) \\
&= \frac{(-s-1+\alpha)l_0}{s^2 + (2+l_1)s + l_1 + 1 - \alpha^2 + l_2\alpha} && (6)
\end{aligned}
$$

Önskat polpolynom är $(s+4)^2 = s^2 + 8s + 16$ ur vilket vi får $l_1 = 6$ och $l_2 = (9+\alpha^2)/\alpha$. Vi ser här konsekvensen av att systemet inte är styrbart då l_2 är odefinierad när $\alpha = 0$, dvs då α närmar sig 0 går l_2 mot oändligheten och för $\alpha = 0$ går det helt enkelt inte skapa den önskade polplaceringen (ett egenvärde är låst i -1). För statisk förstärkning $G_c(0) = 1$ får vi att $\frac{(\alpha-1)l_0}{16} = 1$ dvs $l_0 = \frac{16}{\alpha-1}$ (vi noterar alltså att även $\alpha = 1$ är problematiskt då slutna systemet för denna konfiguration får en statisk förstärkning 0 oavsett hur man väljer l_0).

(c) I detta facit har vi redan löst uppgiften med nollställe i $\alpha - 1$ i slutna systemet, och samma nollställe i öppna systemet fast det förkortas bort mot en pol. **Återigen så var inte tanken att nollstället skulle förkortas bort i (a). Vi ger rätt oavsett om man hittat förkortningen eller inte. Resultatet är alltså att det finns ett nollställe på samma plats i båda öppna och slutna systemet, men att det olyckligtvis förkortades bort mot en pol i överföringsfunktionen i (a) och således inte syns**.

3. (a) Fasskärfrekvensen just nu är 3 rad/s. Förstärkningen där är runt 1 (dvs amplitudmarginal runt 1). Reglering med förstärkning 1 skulle således vara precis på gränsen till instabilitet och med en förstärkning 10 skulle vi definitivt få instabilitet. Alternativt, höjer vi förstärkningen med 10 (dvs 20dB) så skulle ny skärfrekvens bli omkring 9 rad/s, och där är fasen långt under $-180°$, dvs vi skulle få negativ fasmarginal och följdaktligen instabilitet.

(b) Asymptotiska faser är multiplar av 90° (ekv 4.18) så det kan omöjligen konvergera till $-225°$.

(c) Vi läser av att $|G(1i)| \approx 23dB = 14$ och $\arg G(1i) = -90°$ och har således att $G(1i) = -14i$. Känslighetsfunktionen ges av $S(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)}$ och vi har således att $|S(1i)| = \frac{1}{1-7i} = \frac{1}{\sqrt{50}}$

(d) Vi har $F(9i) = \frac{3+9.9i}{1+0.27i}$ dvs $|F(9i)| = \frac{\sqrt{3^2+9.9^2}}{\sqrt{1^2+0.27^2}} = 9.64$, och $\arg F(9i) = \arctan(9.9/3) - \arctan(0.27/1) = 1.01 = 58°$. I figuren ser vi att förstärkningen på $G(9i)$ är omkring -20dB = 0.1 så med regulatorns förstärkning på 9.64 är påståendet rimligt då total förstärkning $|G(9i)F(9i)| = |G(9i)||F(9i)|$ kommer bli runt 1. Fasen på $G(9i)$ är runt -210° så med regulatorns fas på +58° kommer fasen på kretsförstärkningen $G(9i)F(9i)$ definitivt ovanför $-180°$ (eftersom faser adderas) och följdaktligen fås en positiv fasmarginal.

4. (a) Vi vill att $Y(s) = \frac{3}{s+1}F_f(s)V(s) + \frac{4}{(s+2)(s+5)}V(s) = 0$ dvs $\left(\frac{3}{s+1}F_f(s) + \frac{4}{(s+2)(s+5)}\right)V(s) = 0$ och får $F_f(s) = -\frac{4(s+1)}{3(s+2)(s+5)}$

(b) Vi har $\tilde{F}_f = \frac{-4}{30}$ och får på gemensamt bråk att $Y(s) = \frac{-4s^2+12s}{10(s+1)(s+2)(s+5)}V(s)$. Störningen ges av $V(s) = -\frac{1}{s} - \frac{0.1}{s^2}$ och slutvärdessatsen blir

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} sY(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s\frac{-4s^2+12s}{10(s+1)(s+2)(s+5)}\left(-\frac{1}{s} - \frac{0.1}{s^2}\right) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{-4s+12}{10(s+1)(s+2)(s+5)}(-s-0.1) = -0.012
\end{aligned}$$

(c) Slutna systemet blir $Y(s) = \frac{\tilde{F}_f \frac{3}{s+1} + \frac{4}{(s+2)(s+5)}}{1+K\frac{3}{s+1}} V(s)$. När slutvärdessatsen tillämpas kommer enda skillnaden bli att nämnaren nu justeras med faktorn $1+3K$, dvs utsignalen konvergerar till $-\frac{0.012}{1+3K}$.

(d) Sluter vi loopen nu får vi $Y(s) = \frac{4(s+1)}{(s+1+3K)(s+2)(s+5)} V(s)$. Slutvärdessatsen ger

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} sY(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s\frac{4(s+1)}{(s+1+3K)(s+2)(s+5)}\left(-\frac{1}{s} - \frac{0.1}{s^2}\right) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Det som händer här är alltså att överföringsfunktionen inte är 0 i $s = 0$ som den var ovan, och pga detta förkortade bort termer. Följden visar sig bli att vi får en växande utsignal när störsignalen är växande.

5. (a) Nej (Alla startpunkter (x) ligger i vänstra halvplanet, dvs då $K \to 0$ ($\alpha \to 0$) så hamnar alla poler i VHP och systemet är således asymptotiskt stabilt)

(b) Ja (Vi ser 4 st markerade startpunkter, men två av dessa måste vara multipla poler då vi totalt har 6 st grenar som rör sig ut från startpunkterna och sedan omkring i komplexa talplanet)

(c) Ja (två av polerna som startar i startpunkterna där vi har multipla poler rör sig initialt ut mot och in i högra halvplanet)

(d) Ja (De poler som gick ut i högra halvplanet kommer för tillräckligt stort K (dvs α tillräckligt nära 1) komma tillbaka in i VHP, och vi ser även att alla poler för tillräckligt stort K (dvs α tillräckligt nära 1) åker ner på reella axeln (och även där har multipla poler som rör sig mot samma slutvärde)

(e) Går ej att avgöra (det enda vi vet att vi rör oss längs med grenerna när vi varierar K (dvs α). För vilka värden som vi är på olika positioner på grenarna går ej att se)