Kortfattade lösningar till tentamen i TSRT19/22/23 Reglerteknik

Tentamensdatum: 19 augusti 2022

1. (a) Jämförelse med den allmänna överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

ger:

$$(i) : \omega_0 = 1 \quad \zeta = 1/2 \quad (ii) : \omega_0 = 2 \quad \zeta = 1/2$$
$$(iii) : \omega_0 = 1 \quad \zeta = 1 \quad (iv) : \omega_0 = 2 \quad \zeta = 1/4$$

Det ger att (iii) hör samman med D eftersom detta stegsvar saknar översläng. Vidare hör (iv) samman med A som har störst översläng. Fall (i) och (ii) har samma relativa dämpning, d v s lika stor översläng, men i fall (ii) är ω_0 större, vilket ger ett snabbare stegsvar, vilket gäller i B.

Svar: A - (iv), B - (ii), C - (i) och D - (iii).

(b) 1 Sant. En rot kommer att gå mot slutpunkten i -4 och den andra kommer att följa en asymptot utmed negativa realaxeln och förbli i vänster halvplan.

2 Går ej att avgöra. När K växer kommer en rot att gå mot -4. De två övriga kommer att följa två asymtoter vars placering kommer att avgöras av $P(s)$.

3 Sant. Rotorten kommer att ha tre asymptoter, varav två går in i höger halvplan, vilket gör att två rötter kommer att vara höger halvplan för stora värden på K.

(c) Det återkopplade systemets överföringsfunktion ges av

$$G_C(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

där

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad F(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

Den karakteristiska ekvationen, d v s nämnaren hos $G_C(s)$ blir, efter instättning av $F(s)$ och $G(s)$

$$s^3 + (2 + K_D)s^2 + (K_P + 1)s + K_I = 0$$

Svar:

$$s^3 + (2 + K_D)s^2 + (K_P + 1)s + K_I = 0$$

(d) Den önskade karakteristiska ekvationen är

$$(s + 2)^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$$

Jämförelse med ekvationen i c) ger $K_I = 8, K_p = 11$ och $K_D = 4$.

Svar:

$$K_P = 11, K_I = 8, K_D = 4$$

2. (a)
- En hög bandbredd hos G_C ger ett snabbt återkopplat system, d v s en kort stigtid hos stegsvaret.
- En hög resonanstopp hos G_C ger ett oscillativt återkopplat system, d v s en stor översläng hos stegsvaret.
- Värdet hos felkoefficienten e_0 avgörs av den statiska förstärkningen hos G_C, och $e_0 = 0$ om $G_C(0) = 1$.

(b) Utsignalen, efter att den transienta delen försvunnit, ges av

$$y(t) = 2 \mid G(i4) \mid \sin(4t + \arg(G(i4)))$$

där

$$\mid G(i4) \mid = \frac{6}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{6}{5}$$

och

$$\arg G(i4) = -\arctan\frac{4}{3} = -0.93$$

Detta ger

$$y(t) = 2.4 \sin(4t - 0.93)$$

Svar:

$$y(t) = 2.4 \sin(4t - 0.93)$$

(c) In- och utsignal har en periodtid på ca $T = 6.3$ sekunder, vilket ger vinkelfrekvens $\omega \approx 1$. Utsignalen ges av

$$y(t) = \mid G(i) \mid \sin(t + \arg G(i))$$

där

$$\mid G(i) \mid = \frac{k_D}{\sqrt{\tau_D^2 + 1}}$$

och

$$\arg G(i) = -\arctan \tau_D$$

Utsignalen är tidsförskjuten ca 1.1 sek, vilket ger att

$$\tau_D = \tan 1.1 \approx 2$$

Vidare är utsignalens amplitud ca 0.45, vilket ger

$$\frac{k_D}{\sqrt{2^2 + 1}} = 0.45$$

vilket ger $k_D \approx 1$.

Svar:

$$G(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

3. (a) Det återkopplade systemets poler ges av egenvärdena till matrisen $A - BL$, vilket i detta fall ger

$$A - BL = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Matrisen egenvärden ges av ekvationen

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = 0$$

vilket ger

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

som har rötterna -1 och -2.

Svar: Polerna ligger i -1 och -2.

(b) Med de angivna tillståndsvariablerna fås

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

samt, med hjälp av den givna ekvationen,

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -\frac{k}{J}y(t) - \frac{f}{J}\dot{y}(t) + \frac{k}{J}u(t) = -\frac{k}{J}x_1(t) - \frac{f}{J}\dot{x}_2(t) + \frac{k}{J}u(t)$$

På matrisform ger detta

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{f}{J} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{J} \end{pmatrix} u(t) \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

(c) Styrbarhetsmatrisen ges av

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

vilket ger det determinten $\det \mathcal{S} = -\alpha$, vilken är skild från noll när $\alpha \neq 0$. Observerbarhetsmatrisen ges av

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \alpha \end{pmatrix}$$

vilket ger determinanten $\det \mathcal{O} = \alpha$, vilken är skild från noll när $\alpha \neq 0$.

Svar: Systemet är styr- och observerbart för $\alpha \neq 0$.

(d) Oavsett hur man arbetar så inser man att $v(t)$ och $u(t)$ inte kan vara tillstånd, då det är externa effekter som verkar i systemet. För att kunna skapa en tillståndsmodell ska man kunna berskriva allt mha differentialekvationer a förta ordning. Genom att använda $y(t)$, d v s alternativ V, som tillståndsvariabel kan ekvationen skrivas som

$$\dot{y}(t) = -\frac{a}{A}\sqrt{2g}\sqrt{y(t)} + \frac{1}{A}u(t) + \frac{1}{A}v(t)$$

vilket är en (olinjär) tillståndsekvation för tanken.

Svar: Alternativ V.

4. (a) Det återkopplade systemets överföringsfunktion ges av

$$G_C(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

och via insättning av

$$G(s) = \frac{A}{ms^2 + fs} \qquad F(s) = K_P + K_D s$$

fås den karakteristiska ekvationen

$$s^2 + as + b = 0$$

där $a = (f + AK_D)/m$ och $b = AK_P/m$ är positiva. Ekvationens rötter ges av

$$s = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

När uttrycket under rottecknet är negativt, d v s rötterna är komplexa, är alltid realdelen negativ. När uttrycket under rottecknet är positivt är det alltid, till absolutbeloppet, mindre mindre än $a/2$ vilket gör att båda rötterna ligget i vänster halvplan.

Svar: Nej, det återkopplade systemet kan inte bli instabilt med de valda värdena på K_P och K_I.

(b) Genom att jämföra

$$G^0(s) = \frac{(1 + \delta)}{0.1s^2 + 0.01s}$$

med det allmänna uttrycket

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta G(s))$$

fås att $\Delta G(s) = \delta$ i detta fall. Robusthetskriteriet säger att stabilitet för det återkopplade systemet garanteras om

$$\mid G_C(i\omega) \mid < \frac{1}{\mid \Delta G(i\omega) \mid}$$

Enligt figuren är det största värdet hos $\mid G_C(i\omega)$ cirka 1.4 vilket ger kravet

$$1.4 < \frac{1}{\mid \delta \mid}$$

vilket ger

$$\mid \delta \mid < 0.7$$

Svar: Stabilitet garanteras då $\mid \delta \mid < 0.7$.

(c) Genom att jämföra

$$G^0(s) = \frac{1}{0.1(1 + \delta)s^2 + 0.01s}$$

med det allmänna uttrycket

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta G(s))$$

där

$$G(s) = \frac{1}{0.1s^2 + 0.01s}$$

ger rättframma räkningar det önskade resultatet.

Absolutbeloppet av inversen av det relativa modellfelet ges av

$$\frac{1}{\mid \Delta G(i\omega) \mid} = \frac{\sqrt{(1 + \delta)^2\omega^2 + 0.01}}{\omega\delta}$$

Uttrycket går mot oändligheten för avtagande värden av ω, och när ω växer går uttrycket mot $(1 + \delta)/\delta$. För att kriteriet

$$\mid G_C(i\omega) \mid < \frac{1}{\mid \Delta G(i\omega) \mid}$$

ska vara uppfyllt krävas därmed att

$$1.4 < (1 + \delta)/\delta$$

vilket ger kravet

$$\delta < 2.5$$

Svar: $\delta < 2.5$.

5. (a) Blockschemaräkning ger

$$Y(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}R(s) - \frac{KG(s)}{1+KG(s)}N(s)$$

Reglerfelet ges av

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

vilket ger

$$E(s) = R(s) - \frac{KG(s)}{1+KG(s)}R(s) + \frac{KG(s)}{1+KG(s)}N(s) = \frac{1}{1+KG(s)}R(s) + \frac{KG(s)}{1+KG(s)}N(s)$$

(b) Känslighetsfunktionen ges av

$$S(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)}$$

där, i detta fall,

$$F(s) = K \quad G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Detta ger

$$S(s) = \frac{s+1}{s+1+K}$$

Känslighetsfunktionens absolutbelopp ges av

$$\mid S(i\omega) \mid = \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\sqrt{\omega^2+(1+K)^2}}$$

Eftersom $K > 0$ kommer nämnaren alltid att vara större än täljaren, och därmed blir $\mid S(i\omega) \mid$ alltid mindre än ett. Ett större värde på K ger lägre värde på känslighetsfunktionen, d v s reglersystemet förmår följa R bättre.

(c) Den komplementära känslighetsfunktionen ges av

$$T(s) = 1 - S(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$$

vilket i detta fall ger

$$T(s) = \frac{K}{s+1+K}$$

Absolutbeloppet av den komplementära känslighetsfunktionen ges av

$$\mid T(i\omega) \mid = \frac{K}{\sqrt{\omega^2+(1+K)^2}}$$

Ett större värde på K gör att $\mid T(i\omega) \mid$ blir närmare ett, d v s att mätstörningen får större inverkan på E.

(d) Vid $\omega = 1$ ges känslighetsfunktionens förstärkning av

$$\mid S(i \cdot 1) \mid = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega^2+(1+K)^2}}$$

Kravet att denna ska vara mindre än 0.1 ger kravet

$$K > \sqrt{199} - 1$$

Med beteckning $c = \sqrt{199} - 1$ kan kan kravet för den komplementära känslighetfunktionen skrivas

$$\frac{c}{\sqrt{\omega_1^2 + 199}} < 0.1$$

vilket ger kravet

$$\omega_1 > 130.3$$

Svar: $K > \sqrt{199} - 1$ och $\omega_1 > 130.3$.