Lösningar till tentamen i TSRT03/19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2022-03-15

Johan Löfberg

1. (a) Vi noterar först att (III) och (IV) kan strykas då de är instabila. Även (VI) kan strykas då den har statisk förstärkning 0.5 men stegsvaren går mot 1 eller 2 (dvs insignalens amplitud har statiskt förstärkts med 1 eller 2). System (I), (VII) och (VII) har statisk förstärkning 1, system (II) och (V) har statisk förstärkning 2. System (I) och (V) har pol i -1 och således tidskonstant 1s, System (II) och (VII) har pol i -0.5 och tidskonstant 2s, och (VI) och (VIII) har pol i -2 och således tidskonstant 0.5s.

   Avläsning av slutvärden och ungefärliga tidskonstanter

   - Längst upp vänster (A): Slutvärde 2, tidskonstant 2s
   - Längst upp höger (B): Slutvärde 1, tidskonstant 1s
   - Längst ner vänster (C): Slutvärde 1, tidskonstant 0.5s
   - Längst ner höger (D): Slutvärde 2, tidskonstant 1s

   Enda möjliga kombination $A - II$, $B - I$, $C - VIII$, $D - V$.

   (b) Utsignalen går asymptotiskt mot $2|G(3i)|\sin(3t + \arg G(3i))$. Vi ser att $G(3i) = \frac{(3i)^2+9}{(3i)^2+3i+1} = \frac{-9+9}{-8+3i} = 0$, dvs signalen går asymptotiskt mot 0. Ett nollställe på imaginära axeln kan alltså ge upphov till det fysikaliska fenomenet att trots att vi påverkar systemet med en periodisk insignal, så syns inget på utsignalen. Detta kan uppstå i mekaniska system med fjädrar. Häng en vikt i en fjäder och börja röra handen upp och ner periodisk, och du kan hitta en frekvens där massan inte rör sig!

   (c) Nämnaren har gradtal 5 (och täljaren 2) och således kan man skapa en tillståndsmodell med 5 tillstånd.

   (d) Om man har statiskt reglerfel.

   (e) Skattar tillstånd med hjälp av en observatör och använd dessa skattade tillstånd i återkopplingen.

2. (a) Laplacetransform ger $sY(s) = -\beta Y(s) + U(s)$, dvs $Y(s) = \frac{1}{s+\beta}U(s)$, så systemets överföringsfunktion är $\frac{1}{s+\beta}$ och systemet har en pol i $-\beta$.

   (b) Om vi uppnår stationäritet så gäller $\dot{y}(t) = 0 = -\beta y(t) + \beta r(t)$, dvs $y(t) = r(t)$. Detta är öppen styrning och kommer inte fungera i praktiken då vi ej känner det eakta värdet på β, och modellen som helhet kan vara fel, och det kan finnas störningar.

   (c) Slutna systemet ges av $G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$. Vår regulator är $F(s) = K_p$ så vi får $G_c(s) = \frac{K_P}{s+\beta+K_P}$. Om vi antar att referensinflationen är c, dvs $R(s) = c/s$, så kommer enligt slutvärdesteoremet inflationen konvergera till $G_c(0)c = \frac{K_P}{\beta+K_P}c$, dvs statiska förstärkningen är $\frac{K_P}{\beta+K_P} < 1$

   (d) Så länge som systemets verkliga β uppfyller $\beta + K_P > 0$ så kommer slutna systemet vara stabilt. Ju större K_P görs, desto mer fel kan vi ha i vår modell av β, eftersom vi då flyttar oss in i vänstra halvplanet och får mer marginal för fel i β. Om vi vet att $beta > 0$ så kommer vi ha stabilitet för varje val av $K_P > 0$. Ju större K_P är, desto närmre statisk förstärkning 1 kommer vi få i slutna systemet, oavsett värde på β.

   (e) Regulatorn är nu $1 + \frac{K_I}{s}$ och slutna systemet $\frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$ förenklas till $\frac{s+K_I}{s^2+(1+\beta)s+K_I}$. Slutna systemets poler ges av rötter till $s^2 + (1+\beta)s + K_I = 0$, dvs $-\frac{1+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+\beta)^2}{4} - K_I}$. För tillräckligt stort K_I blir uttrycket i kvadratroten negativt och vi får komplexa rötter, och med ökande K_I blir komplexdelen allt större, vilket leder till ett allt mer oscillativt system.

3. (a) Vi har systemet $\ddot{y}(t) = -y(t) - b\dot{y}(t) + u(t)$. Med $x_1(t) = y(t)$ och $x_2(t) = \dot{y}(t)$ så blir $\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$ och $\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -x_1(t) - bx_2(t) + u(t)$. Skrivet på matrisform blir det

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

(b) Polerna till systemet ges av egenvärdena till A, $\det(sI - A) = 0$. Den karaktäristiska ekvationen blir $s^2 + bs + 1 = 0$ med rötter $s = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}$. Systemet har alltså reella poler om $b \geq 2$.

(c) Med $u = -Lx + l_0 r$ ges det slutna systemet av $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(sI - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \right) \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} l_0$ vilket beräknas till $G_C(s) = \frac{l_0}{s^2 + (0.5 + l_2)s + 1 + l_1}$. Med två önskade poler i -2 så betyder det att vi vill ha slutna systemets polpolynom $s^2 + 4s + 4$ vilket leder till $l_1 = 3$ och $l_2 = 3.5$. För att få statisk förstärkning på slutna systemet $G_C(0) = 1$ så måste vi välja $l_0 = (1 + l_1) = 4$.

(d) I stationärt tillstånd gäller, om vi lyckats med reglerdesignen i föregående uppgift och erhållit statisk förstärkning 1 i slutna systemet, att $y(t) = r(t)$ och vår differentialekvation säger att i stationäritet gäller $m \cdot 0 = u(t) - r(t) - b \cdot 0$, dvs $u(t) = r(t) = 1$ stationärt. Alternativt, $u(t) = 4r(t) - 3y(t) - 3.5\dot{y}(t)$ vilket i stationäritet då $r = y = 1$ leder till $u(t) = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 3.5 \cdot 0$.

4. (a) I skärfrekvensen 2 rad/s är fasen under $-180°$ vilket betyder att slutna systemet blir instabilt i nuvarande konfiguration.

(b) Slutna systemet ges av $G_C = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)}$ vilket då blir $G_C = \frac{0.1G(s)}{1 + 0.1G(s)}$. Statiska förstärkningen för slutna systemet är således $G_C(0) = \frac{0.1G(0)}{1 + 0.1G(0)}$. Statiska förstärkningen för givna systemet $G(0)$ är 4 (eller avläses i Bodediagrammet till runt 12dB vilket är ca 4). Vi får således $G_C(0) = 0.28$ så utsignalen skulle för $r(t) = 1$ konvergera till 0.28 och vi skulle få ett statiskt reglerfel på 0.72. Ett annat sätt är att komma ihåg att statiska reglerfelet e_0 ges av $\frac{1}{1 + F(0)G(0)}$ och stoppa in. Alternativt kan man räkna med den givna överföringsfunktionen, men det blir bara extra arbete då det enda vi behöver är $G(0)$.

(c) En sinussignal med frekvens 1 rad/s förstärks med $|G_C(1i)|$ och fasförskjuts med $\arg G_C(1i)$. Vi har $G(1i) = -10i$ (amplitud 20dB = 10 och fas $-90°$ dvs negativa imaginära axeln). Vi har $G_C(1i) = \frac{-0.1 \cdot 10i}{1 - 0.1 \cdot 10i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ dvs fasförskjuts $-45°$ och förstärks med $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Alternativt kan man räkna med den givna överföringsfunktionen, men det blir bara extra arbete då det enda vi behöver är $G(1i)$.

(d) Vi ser en resonanstopp vilket tyder på komplexa poler. Med enbart reella poler (och inga nollställen) så skulle t.ex ekv 4.17 i boken ge en monotont avtagande amplitudförstärkning.

(e) Statiska förstärkningen för $G(s)F(s)$ skulle bli ∞ dvs lågfrekvensasymptoten för amplitudförstärkning skulle luta i diagrammet. Vi skulle även få en fas som gick mot $-90°$ för låga frekvenser.

5. Rotorten visar poler som funktion av K i ett slutet system där $F(s) = K\frac{T_I s + 1}{T_I s}$ och ett linjärt system som vi ansätter till $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$. Slutna systemet är $\frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{KN(s)(T_I s + 1)}{D(s)T_I s + KN(s)(T_I s + 1)}$. Karakteristiska ekvationen som analyseras är alltså $D(s)T_I s + KN(s)(T_I s + 1) = 0$ och med standardnotation från boken ges startpolynomet av $P(s) = D(s)s$ och slutpolynomet av $Q(s) = N(s)(T_I s + 1)$. Vi bör alltså se startpunkter som motsvaras av $s = 0$ samt rötter till $D(s)$, samt slutpunkter som ges av rötter till $N(s)$ och $T_I s + 1$.

(a) **Ja** (*Vi ser 4 grenar som representerar poler för slutna systemet, och 2 av dessa är alltid på reella axeln*)

(b) **Nej** (*Vi har 4 startpunkter, och vi vet att dessa motsvarar rötter till $D(s)T_I s$. Sålunda måste $D(s)$ ha 3 rötter, dvs $G(s)$ har tre poler*)

(c) **Ja** (*Rotorten rör sig aldrig in i högra halvplanet*)

(d) **Nej** (*Slutpunkter motsvarar rötter till $N(s)(T_I s + 1)$. Om $T_I = 1/2$ så skulle en rot vara -2 men någon sådan sådan slutpunkt finns ej markerad*)

(e) **Ja** (*Polpolynomet skulle få ett $P(s)$ med en extra rot, dvs skillnaden i antalet rötter i start- resp slutpolynom skulle öka med 1, vilket skulle göra att vi skulle få en mer asymptot, dvs 3 st, och enligt formel på sid 67 skulle två av dessa peka in i högra halvplanet.*)