Lösningar till tentamen i TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2022-01-10

Johan Löfberg

1. (a) Exempelvis:

   En PID-regulator behöver bara mätning av reglerad signal, medan en tillståndsåterkoppling kräver alla tillstånd (eller utveckling av en observatör)

   En PID-regulator kan skapas utan någon modell, medan reglerdesign baserat på en tillståndsreglering kräver en tillståndsmodell för utveckling.

   En PID-regulator kan vara mer intuitiv för någon som ej känner till avancerad reglerteknik jämfört med en tillståndsåterkoppling.

   En tillståndsåterkoppling blir automatiskt stabil (i teorin) eftersom man alltid väljer stabila poler i polplaceringen, medan en PID-regulator kan kräva mer trial-and-error.

   En del system kan ej stabiliseras med en PID-regulator, medan man alltid kan göra en stabil polplacering givet en (styrbar) tillståndsmodell

   En tillståndsåterkoppling använder mer information (alla tillstånd) och kan således leda till bättre prestanda jämfört med en PID-regulator som bara använder den reglerade storheten.

   (b) Vi kan testa att skapa en observatör utgående från mätningarna och modellen. För att en sådan ska gå att konstruera måste modellen vara observerbar vilket kan testas genom att studera determinanten på $\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Determinanten blir noll dvs icke observerbart. Fysikaliskt handlar det om att vi mäter en summa av två signaler som dessutom utvecklar sig med samma dynamiska förlopp (tidskonstanter -1 från insignal) vilket gör att vi inte kan separera de två signalerna.

   (c) Vi har $G(5i) = \frac{100}{-25+5i+25}$ och således förstärks signalen med $|G(5i)| = \frac{100}{\sqrt{(25-25)^2+5^2}} = 20$ och amplituden på den resulterande sinusformade utsignalen blir $4 \cdot 20 = 80$.

   (d) Frågan utgår då det fanns ett skrivfel i en överföringsfunktion $G_1(s)$ i den tryckta tentan vilket gjorde att ett par ej kunde matchas (betyggräns således sänkt).

2. (a) Vi kan exempelvis börja med att ta fram överföringsfunktionen (via $G(s) = C(sI-A)^{-1}B$) för det första systemet och får $G(s) = \frac{1}{s^2+3s+1}$. Vi kan göra motsvarande för det andra systemet och se att vi får samma, men vi kan även konstatera att den andra tillståndsmodellen är den här överföringsfunktionen i observerbar form. Det som måste skilja modellerna åt är att de använder olika tillstånd.

   (b) Ansättning $u = -Lx = -l_1x_1 - l_2x_2$ så får vi $\det(sI-(A-BL)) = \det \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ -1+l_1 & s+1+l_2 \end{pmatrix}$ vilket ger polpolynom $s^2+(3+l_2)s+(1+l_1+2l_2)$. Önskat polpolynom $(s-(-3-i\sqrt{3})(s-(-3+i\sqrt{3}) = s^2+6s+12$. Jämför och vi har $l_2 = 3$ och $l_1 = 5$. Slutna systemed med framkopplingen blir $C(sI-(A-BL))^{-1}Bl_0 = \frac{l_0}{s^2+6s+12}$ vilket gör att vi måste välja l_0 till 12.

   (c) Med β istället för 1 i B blir polpolynomet $s^2+(3+\beta l_2)s+(1+\beta l_1+2\beta l_2)$ vilket med uträknad styrlag blir $s^2+(3+3\beta)s+(1+11\beta)$ En andragradare har negativa realdelar om och endast om båda koefficienter är positiva så för stabilitet krävs $3+3\beta > 0$ och $1+11\beta > 0$ vilket betyder att vi kan garantera stabilitet så länge som $\beta > -1/11$. Vi har alltså ganska god marginal och kan ha väldigt fel i vår modell utan att slutna systemet blir instabilt. Prestandan blir kanske inte så bra dock.

3. (a) Figuren påvisar en skärfrekvens på $G(s)$ (dvs ett mått som uttalar sig om slutna systemet när vi återkopplar med $K = 1$) på ungefär 7.5 rad/s. Fasen är där klart under $-180°$ vilket betyder att det slutna systemet skulle vara instabilt.

   (b) En ändrad propertionalförstärkning K_P påverkar ej fasen (även kallat argumentet) på nya kretsförstärkningen $K_PG(s)$. För att få en fasmarginal på 45° måste argumentet på $K_PG(iw)$ vara $-135°$ i dess skärfrekvens. I figur ser vi att $G(iw)$ (och således $K_PG(iw)$) har denna fas vid 2 rad/s. För att detta skall vara skärfrkevensen så måste $|K_PG(2i)| = 1$. Vi avläser att $|G(2i)| = 20dB = 10$, och således måste K_P väljas till 1/10 eller mindre. Om vi väljer en högre förstärkning stiger skärfrekvensen vilket gör att fasmarginalen sjunker under kravet.

(c) För komplexa tal har vi att $|F(iw)G(iw)| = |F(iw)||G(iw)|$ och $\arg F(iw)G(iw) = \arg F(iw) + \arg G(iw)$. Vi kontrollerar $|F(7.5i)| = \frac{4}{5}\sqrt{1^2 + (0.1 \cdot 7.5)^2} = 1$ och konstaterar att skärfrekvensen därför är oförändrad. Vi har $\arg F(7.5i) = \arctan(0.1 \cdot 7.5/1) = 0.64 \approx 37°$ vilket torde lyfta oss upp över $-180°$ eftersom fasmarginalen ursprungligen ser ut att vara runt $-20°$.

(d) Fasen då $\omega \to 0$ går mot $-90°p$ där p är antalet poler i origo, och således har vi en pol i origo. Vi kan även argumentera genom att vi i låga frkevenser har en amplitudkurva som ökar med ungefär $20dB$ då vi går från $w = 1$ till 0.1, dvs den ökar med en faktor 10 då ω minskar en faktor 10 (lutning -1 i loglog-skala) vilket betyder att förstärkningen utvecklar sig som $\frac{A}{w}$ för små ω, dvs överföringsfunktionen beter sig som $\frac{A}{s}$ för små s.

4. (a) Slutna systemet blir $G_C(s) = \frac{K_P(-2s+1)}{s^2+(3-2K_P)s+1+K_P}$. Systemet blir instabilt om $K_P > 3/2$.

(b) Polerna kan bli instabila eftersom K_P kommer in i polpolynomet i multiplikation med den negativa konstanten -2. Denna konstant kommer från nollställepolynomet till öppna systemet $\underline{-2}s+1$. Med andra ord, p.g.a det instabila nollstället (dvs ett nollställe i höger halvplan, även kallat icke-minfas) så har vi fått vår begränsning.

(c) Eftersom $G(s)$ har statisk förstärkning $G(0) = 1$ så får man ej något statiskt reglerfel vid öppen styrning (dvs vi kan nog misstänka att det redan finns någon enkel intern reglering i systemet). Statiska förstärkningen för slutna systemet är däremot $G_C(0) = \frac{K_P}{K_P+1}$. Således får vi alltid statiskt reglerfel, och det kommer dessutom bli stort eftersom statiska förstärkningen blir uppåt begränsad av $\frac{3/2}{1+3/2} = 0.6$.

(d) Med $K_P = 1/2$ får vi $G_C(s) = \frac{-s+0.5}{s^2+2s+1.5}$. Komplementära känslighetsfunktionen ges av $T(s) = G_C(s)$ eftersom vi har en enkel återkoppling av reglerfel (dvs inte separat framkoppling av referens och återkoppling av mätsignal). Robusthetskriteriet säger att komplementära känslighetsfunktionen måste vara liten där relativa modelfel är stora, så vi kontrollerar i den specifika frekvensen $|T(100i)| = \left|\frac{-100i+0.5}{(100i)^2+2\cdot 100i+1.5}\right| = \frac{\sqrt{0.5^2+100^2}}{\sqrt{(1.5-100^2)^2+100^2}} \approx 0.01$. Robusthetskriteriet säger således att vi klarar av relativa modellfel som uppfyller $|\Delta(100i)| < 100$, dvs modellen kan vara väldigt fel så det bör inte vara några bekymmer.

5. Vi ansätter $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ och med regulator $1 + K_D s$ fås slutna systemet $\frac{N(s)(1+K_D s)}{D(s)+N(s)+K_D sN(s)}$. Vi har startpunktspolynomet $P(s) = D(s) + N(s)$ och slutpunktspolynomet $Q(s) = sN(s)$.

(a) Nej (Rotorten visar 2 slutpunkter, dvs $Q(s)$ är av ordning 2. Då $Q(s) = sN(s)$ måste $N(s)$ vara av ordning 1, dvs vi har ett nollställe i $G(s)$.

(b) Ja (Vi ser 4 startpunkter, således är $D(s) + N(s)$ av ordning 4, vilket betyder att $D(s)$ är av ordning 4)

(c) Ja (alla startpunkter ligger strikt inne i VHP, och således är alla poler stabila i en omgivning till $K_D = 0$)

(d) Går ej att avgöra (Vi vet inget om när vi är på olika punkter på grenarna, och således kan de två reella polerna i VHP uppträda innan de två komplexa går ut i HHP, men vi kan lika gärna ha att de två komplexa inte hunnit ut i HHP innan vi får två reella stabila.)

(e) Nej (Finns inget som gör att vi kan säga detta med säkerhet. Det vi vet med säkerhet är att för tillräckligt stort K_D så kommer en pol ha en realdel som är större än 2, vilket är ett typiskt missförståndfel, och vi vet även att för tillräckligt stort K_D är alla poler reella.)