Lösningar till tentamen i Reglerteknik TSRT19

Tentamensdatum: 2021-01-09

Johan Löfberg

1. Falskt. En P-regulator kan ge återkopplade system utan reglerfel (t.ex om $G(s) = \frac{1}{s}$, mer generellt när man har en pol i origo)

2. Falskt. En P-regulator kan stabilisera instabila system (t.ex $K_P = 2$ stabiliserar $G(s) = \frac{1}{-s+1}$)

3. Två system utan resonanstoppar som skiljer sig åt i statisk förstärkning. Två med resonanstoppar varav en är extremt kraftig. Koppla med de två monotona stegsvaren resp. de två svängiga stegsvaren. A-4,B-3,C-2,D-1

4. Enda tillståndet är y(t)

5. $G(s) = \frac{2}{s+2}$. Systemet förstärker med $|(G(2i)| = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2}} = 1/\sqrt{2}$ och fasförskjuter med $\arg(G(2i)) = \arctan 2/2 = -\pi/4$. Amplituden på utsignalen är således $2/\sqrt{2}$ och rätt svar $y(t) = 1.4\sin(2t - \pi/4)$.

6. Normalisera till $\frac{K}{sT+1}$ och man ser att $\frac{2\beta}{s+100}$ är klart snabbast då den har en tidskonstant på 1/100.

7.

8. Fallen $n = 1$ och $n = 2$kan man göra genom att räkna ut poler manuellt om man vill och man ser då att det alltid är stabilt. Smidigare är dock att använda rotort för alla fallen. Man har 4 startpunkter (som ligger i VHP så alla fallen är stabila för små K) och inga slutpunkter, vilket betyder att man får n asymptoter i alla fall. För fallen $n = 3$ resp $n = 4$ måste dessa gå in i högra halvplanet, vilket betyder att man bara har stabilitet för vissa K.

9. (a) Vi skär 0dB vid skärfrekvesen $\omega_c = 3.5$ rad/s, och -180 grader vid fasskärfrekvensen $\omega_p = 18$ rad/s där förstärkningen är $-12dB = 10^{-12/20} = 0.25$. Sålunda är amplitudmarginalen 4. Fasen i skärfrekvensen är -80 grader så fasmarginalen är 100 grader.

   (b) Amplitudmarginalen säger att kretsförstärkningen kan öka med en faktor 4 innan vi får instabilitet, således kan vi stoppa in en P-regulator med förstärkning 4 som mest.

   (c) Överföringsfunktion från referens till utsignal ges av $\frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}$ och för en konstant referens är statiska förstärkningen $\frac{G(0)F(0)}{1+G(0)F(0)}$. Vi ser $G(0) = 6dB = 10^{6/20} = 2$ och får förstärkningen 0.66, dvs vi får 33% fel!

   (d) Vi har $\arg G(i\omega)F(i\omega) = \arg G(i\omega) + \arg F(i\omega)$. Systemets fas avläses till $-135°$. Fasen för regulatorn blir $\arg(1 + 10i) = \arctan 10 = 84°$ och fasen blir alltså $-135° + 84° = -51°$. Alternativt från polär form $G(iw) = 10^{-8/20}e^{-\frac{135\pi}{180}i} = -0.8 - 0.28i$ och multiplicera med $1 + 10i$ vilket ger $2.35 - 3.09i$ vilket är ett komplext tal i nedre högra ortanten med fas $-\arctan(3.09/2.35) = -51°$ (onödigt mycket mer komplicerad då det inte finns någon anledning att blanda in storleken på komplexa talen då fasen bara beror additativt på de individuella faserna.)

10. (a) Vi har $A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{m} & \frac{1}{m} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ansätt återkoppling $u = -Lx$ och polpolynomet $\det(sI - (A - BL))$ blir $s^2 + (1 + l_2 + 1/m)s + (2 + l_1 + l_2)/m$. Önskat polpolynom $(s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1$. Jämförelse ger $l_2 = 1 - \frac{1}{m}$ och $l_1 = m - 2 - l_2 = m + (1/m) - 3$. Givet att vårt reglersystem vet eller kan lista ut vilken last m som verkar på hydrualsystemet kan vi alltså enkelt justera vår styrlag så att dynamiken ser likadan ut oavsett (detta kallas gain-schedulerande reglering och används mycket i praktiken)

    (b) Slutna systemet då $u = -Lx + r$ ges av $C(sI - (A - BL))^{-1}$ så om vi räknar vidare med matriserna vi använt i (a) kommer vi till $\frac{(1/m)}{s^2+2s+1}$

    (c) Vi får alltså ett statiskt fel (om inte $m = 1$), och måste justera framkopplingen från r med en faktor m för att kompensera, dvs med $u = -Lx + mr$ så får vi slutna systemet $\frac{1}{s^2+2s+1}$ som har statisk förstärkning 1.

11. Det blir instabilt! Ett sätt att visa är att baka ihop $sX(s) = 2X(s) + U(s)$ och $U(s) = (-3X(s) + R(s))/(s + 1)$ vilket ger slutna systemet $sX(s) = 2X(s) + (-2X(s) + R(s))/(s + 1)$ dvs $(s - 2 + 3/(s + 1))X(s) = (1/(s + 1))R(s)$ vilket blir $X(s) = \frac{1}{s^2-s+1}R(s)$ vilken är instabil. Alternativt så

skriver man slutna systemet som en tillståndsmodell med $\dot{x} = 2x + u, \dot{u} + u = -3x + r$, dvs analys av $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ vilken har egenvärden i högra halvplanet.

12. (a) Blockschemat säger $Y(s) = G(s)(V(s) + K(-Y(s))$ dvs $Y(s) = \frac{G(s)}{1+KG(s)}V(s) = \frac{1}{s+K}V(s)$ och följdaktligen $U(s) = -KY(s) = \frac{-K}{s+K}V(s)$.

    (b) Frekvenssvarsanalys baserat på $\frac{1}{i\omega+K}$ avslöjar att signalen (till y) förstärks med $\frac{1}{\sqrt{\omega^2+K^2}}$ samt fasförskjuts $-\arctan(\omega/K)$ dvs $y(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+K^2}}\sin(\omega t - \arctan(\omega/K))$. Styrsignalen blir K ggr större samt är 180 grader fasförkjuten relativt y (teckenbyte).

13. (a) $E = R - Y = R - G(V + FE)$ så $E = \frac{1}{1+GF}R + \frac{-G}{1+GF}V$. Med $G = 1/s$ och $F = (K_P s + K_I)/s$ fås $E(s) = \frac{s^2}{s^2+K_P s+K_I}R(s) + \frac{-s}{s^2+K_P s+K_I}R(s)$, dvs statisk förstärkning är 0 för båda delarna så inget reglerfel uppstår. Om $K_I = 0$ får vi $E(s) = \frac{s}{s+K_P}R(s) + \frac{-1}{s+K_P}V(s)$, dvs vi får statiskt reglerfel från insignalsstörningen då denna statiska förstärkning är $-1/K_P$ således blir regerfelet $-25/K_P$.

    (b) Slutna systemet från r till y ges av $GF/(1 + GF) = \frac{2s+1}{s^2+2s+2}$ vars poler är $-1 \pm i$. Vi har $\phi = \pi/4$ och således $\zeta = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Alternativt så ser vi att polpolynomet kan skrivas i standardform $s^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}s + (\sqrt{2})^2)$ vilket identifierar dämpningen till $\frac{1}{\sqrt{2}}$.