Lösningar till tentamen i TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2020-01-17

Johan Löfberg

1. (a) Exempelvis:

   Referens $r(t)$ - Den önskade ugnstemperaturen, justeras typiskt via ett vred på spisens framsida.

   Utsignal $y(t)$ - Temperatur uppmätt inne i ugnen.

   Styrsignal $u(t)$ - Ström som används för att skapa värme i ugnselementet.

   Modell - En fysikalisk beskrivning för hur en viss ström skapar en temperatur på värmeelementet i ugnen, och hur denna sedan sprider värme i ugnen (konvektion, strålning, etc.). Vanligtvis en differentialekvation som beskriver förändring i temperatur (dvs $\dot{y}(t)$) som funktion av pålagd ström $\dot{u}(t)$) och nuvarande temperatur $y(t)$ (och kanske störningar i en mer komplett modell). (Alternativt har man via t.ex stegsvarsexperiment tagit fram en differentialekvation som beskriver samma sak, utan att reglerteknikern behöver känna till termodynamik etc)

   Störningar - Ugnen öppnas och kall luft kommer in. En iskall älgstek ställs in och sprider kyla.

   (b) En mycket dålig affär. Mikrofonen är beskriven som ett lågpassfilter med en bandbredd på 2π rad/s (1Hz), dvs förstärkningen är omkring 1 upp till bandbredden (där den är $1/\sqrt{2}$) och sedan faller förstärkningen av snabbt. Ljud signifikant över 1Hz (t.ex 10Hz och uppåt) skulle sålunda filtreras bort nästan helt, dvs allt ljud som det mänskliga örat kan uppfatta.

   (c) Nollställepolynomet har 100 nollställen repeterade i -1 och är i utvecklad form ett polynom av gradtal 100. Polpolynomet har 200 poler repeterade i -3 och är i utvecklad form ett polynom av gradtal 200. Valfri kanonisk form (styrbar/observerbar) kan t.ex användas för att skriva modellen i tillståndsform, och den modellen skulle behöva 200 tillstånd (i praktiken skulle man inte använda en kanonisk form utan utnyttja den speciella formen och slippa att först utveckla polynomet)

   (d) Vi skriver i formen $F_1(s) = 1 + \frac{0.1}{s} + 2s$ och $F_2(s) = 1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}$ och drar slutsatsen att $F_1(s)$ är en PID-regulator i formen $K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$. $F_2(s)$ är dock ej en PID-regulator (den implementerar en dubbelintegrator av något slag och har ej någon D-del).

2. (a)
   - I-del medför att reglerfelet försvinner. Enligt figuren går $y(t)$ mot 1 för A och D, d v s de hör samman med regulator 2 och 3.
   - Större K_I medför att felet försvinner snabbare, men kan samtidigt göra systemet (mer) oscillativt. D oscillerar mer än A, vilket ger kombinationerna A-2 och D-3.
   - Återstår nu att kombinera B och C med 1 och 4. Större K_P gör systemet snabbare och minskar reglerfelet. Enligt figuren har stegsvaret i B både längre stigtid och större reglerfel än stegsvaret i C. Det ger därför kombinationerna B-1 och C-4.

   Svar: A-2, B-1, C-4 samt D-3

   (b) PI-reglering enligt uppgift a) ger

   $$F(s) = K_P + K_I\frac{1}{s}$$

   och det slutna systemet ges av

   $$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)} = \frac{(K_P + K_I\frac{1}{s})\frac{20}{6s+2}}{1+(K_P + K_I\frac{1}{s})\frac{20}{6s+2}} = \\ &= \frac{(sK_P + K_I)20}{(6s+2)s + (sK_P+K_I)20} = \frac{\frac{10}{3}(sK_P+K_I)}{s^2 + \frac{1}{3}(1+10K_P)s + \frac{10}{3}K_I} \end{aligned}$$

   Karaktäristiska ekvationen definierar polerna alt. rötter i tidsplanet och är således

   Svar:

   $$s^2 + \frac{1}{3}(1+10K_P)s + \frac{10}{3}K_I = 0$$

   (c) Jämför karaktäristiska ekvationen med standardformen

   $$s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

där ξ är relativa dämpningen och ω_0 är avståndet från origo till polerna. Det ger ekvationerna

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{10}{3}K_I} \\ 2\xi\omega_0 &= \frac{1}{3}(1+10K_P) \end{aligned}$$

Enligt uppgift ska $\omega_0 \geq 2$ och $\xi = 0.7$ vilket ger lösningen
Svar:

$$\begin{aligned} K_I &\geq 1.2 \\ K_P &= 0.42\sqrt{\frac{10}{3}K_I} - 0.1 \end{aligned}$$

3. (a) Det kompenserade systemet har en skärfrekvens på 2 rad/s, en fasmarginal på 40°, och en lågfrekvensförstärkning $F(0)G(0) = infty$ (vi ser effekt av integralverkan (pol i origo) då den lutar och således kommer gå mot oändligheten då ω går mot 0.)

   Det ursprungliga systemet har en skärfrekvens på 3.2 rad/s, en fasmarginal på $-10°$ (dvs instabilt) och en lågfrekvensförstärkning $G(0) = 10 (= 20dB)$ (dvs ingen integralverkan).

   Kraven som ställts är alltså att man velat stabilsera systemet och önskat en skärfrekvens på 2 rad/s med 40° fasmarginal. Man har dessutom lagt till integralverkan i kretsförstärkningen, och det är typiskt något man gör för att garantera att man inte får statiska reglerfel vid konstant referenssignaler (eftersom man enligt slutvärdesteoremet då får kravet att $F(0)G(0) = infty$).

   (b) Det kompenserade systemet $F(s)G(s)$ har en integrator till skillnad från det ursprungliga systemet $G(s)$. Det kan endast erhållas via en lag-länk med $\gamma = 0$. Med standardval av $\tau_I = \frac{10}{\omega_{c,önskad}} = \frac{10}{2} = 5$ fås $F_{lag}(s) = \frac{5s+1}{5s}$.

   Det okompenserade systemet har en fas $-180°$ vid den önskade skärfrekvensen, och vi måste alltså fasavancera 40° för att nå $-140°$. Dock så sänker lag-delen fasen med 6°, så man har tagit höjd för det och avancerat 46°. Tabell eller formel i boken ger $\beta = 0.17$ och vi får även att $\tau_D = 1.21$. Okompenserade systemets förstärkning i önskade skärfrekvensen, $|G(2i)|$ är 10dB, dvs 3.16. För att vi skall erhålla skärfrekvensen 2 måste vi ha $|F(2i)G(2i)| = |F_{lag}(2i)F_{lead}(2i)G(2i)| = 1$. I sedvanlig ordning använder vi oss av att lag-länken i stort sett har förstärkningen 1 i den önskade skärfrekvensen, samt att lead-regulatorns förstärkning i önskade skärfrekvensen är $K/\sqrt{\beta}$. Vi löser $3.16K/\sqrt{0.17} = 1$ och får $K = 0.13$.

   Sammanfattningsvis $F(s) = 0.13\frac{5s+1}{5s}\frac{1.21s+1}{0.21s+1}$

   En alternativ tolkning är att en lite mindre erfaren reglertekniker gjort regulatorn och siktat på en fasmarginal på 46° men glömt att lag-delen ger en fasförlust, och att man då landat på den slutgiltliga fasmarginalen 40°.

4. (a) Ja (för tillräckligt stort K så visar rotorten m.a.p K att de två rötterna går ner på reella axeln och en rör sig asymptotiskt mot -∞ och den andra mot -2)

   (b) Nej (slutna systemets poler visas i rotorterna, och i t.ex rotorten m.a.p K så ser vi att det finns två poler. Eftersom regulatorn här inte har några poler så måste alla poler i slutna systemet komma från dynamik i $G(s)$. Mer detaljerat, med ansättning enligt ledning så blir slutna systemet $\frac{KN(s)}{D(s)+KN(s)}$. Startpunkter motsvarar rötter till $D(s)$, och eftersom det finns två startpunkter så är $D(s)$ av ordningstal 2, och således har $G(s)$ två poler)

   (c) Ja (Regulatorn $15(1 + 0.5s)$ kan även tolkas som $15(1 + 0.5\frac{s}{s/\infty+1})$ dvs i en rotort m.a.p α motsvarar detta slutpunkterna. De är båda reella i figuren.

   (d) Ja (I rotorten för α så ser vi att grenarna rör sig ute i komplexa talplanet (mot de två komplexa startpunkterna) för minskande α)

   (e) Nej (Per definition så har vi inte någon pol i origo på regulatorn, utan polen är $-\alpha$. Vad startpunkten visar är att **slutna** systemet har en pol som går mot origo då α går mot 0. En pol i origo på regulatorn ger upphov till en startpunkt i origo i en rotort om man ritar en rotort på ett objekt som är direkt skalat i parametern, t.ex rotort m.a.p K då $F(s) = K(1+0.5s+1/s)$, men det är inte det vi gjort här.

5. (a) Med $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$ får vi $A - BL = \begin{bmatrix} -1-l_1 & 2-l_2 \\ 2-2l_1 & -1-2l_2 \end{bmatrix}$. Egenvärdena till denna matris ges av lösningarna till $det(\lambda I - (A - BL)) = 0$ dvs $det(\begin{bmatrix} \lambda+1+l_1 & -2+l_2 \\ -2+2l_1 & \lambda+1+2l_2 \end{bmatrix}) = 0$. Förenkling

leder till $\lambda^2 + \lambda(2 + l_1 + 2l_2) + (-3 + 5l_1 + 4l_2) = 0$. Detta jämförs med önskade polpolynomet $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$ och lösning av det uppkomna ekvationssystemet leder till $l_1 = 1, l_2 = 0.5$. Överföringsfunktionen för det slutna systemet ges av $C(sI - (A - BL))^{-1}Bl_0$ vilken har statisk förstärkning $-C(A - BL)^{-1}Bl_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} l_0 = \frac{5}{4} l_0$. För att undvika stationärt reglerfel vid konstant referenssignal krävs att statiska förstärkningen är ett, således väljs $l_0 = \frac{4}{5}$.

(b) Stabilitet (som avgör om skattningsfelet går mot noll) hos observatör avgörs av egenvärdena till skattningsfelens dynamik, $A - KC$, där C är den matris som beskriver vilka mätvärden som används. Vi vet inte om vi mäter $x_1(t)$ (motsvarande $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$) eller $x_2(t)$ (motsvarande $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$). Med $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ ges observatörsdynamiken för dessa båda fall av

$$
\begin{aligned}
A - KC_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - k_1 & 2 \\ 2 - k_2 & -1 \end{bmatrix} \\
A - KC_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 - k_1 \\ 2 & -1 - k_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Egenvärdena för de två fallen ges av lösningarna till

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 + \lambda(2 + k_1) + (-3 + k_1 + 2k_2) = 0 \\
\lambda^2 + \lambda(2 + k_2) + (-3 + 2k_1 + k_2) = 0
\end{aligned}
$$

Lösningarna till en andragradsekvation $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ har stabila rötter om och endast om a och b är positiva. Om vi väljer en k_1 och k_2 så att $2 + k_1 > 0$, $2 + k_2 > 0$, $-3 + k_1 + 2k_2 > 0$ samt $-3 + 2k_1 + 2k_1 > 0$ så är båda uppställningarna stabila (t.ex $k_1 = k_2 = 5$).